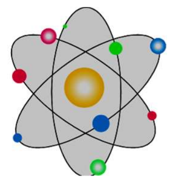
SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO GIA LAI

TRƯỜNG THPT NGUYỄN THÁI HỌC

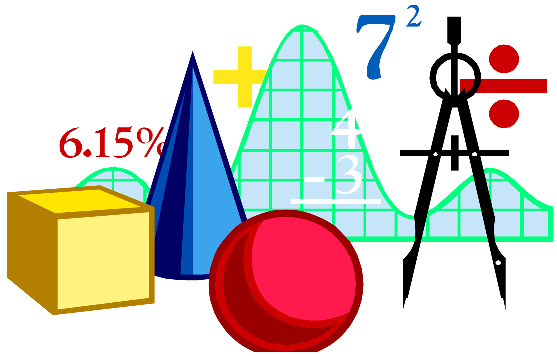
--------❦✵❧---------



SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

CHUYÊN ĐỀ: MỘT SỐ GIẢI PHÁP GIÚP HỌC SINH 12 PHÁT HUY KHẢ NĂNG GIẢI BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở KỲ THI THPT QUỐC GIA

.



Người thực hiện: Trần Thanh Hữu
Chức vụ: Tổ trưởng chuyên môn

Năm học 2017 - 2018

I. MỞ ĐẦU

Mỗi một nội dung trong chương trình toán phổ thông đều có vai trò rất quan trọng trong việc hình thành và phát triển tư duy của học sinh. Trong quá trình giảng dạy, giáo viên phải đặt ra cái đích là giúp học sinh nắm được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp, kỹ năng, kỹ xảo, từ đó tạo được thái độ và động cơ học tập đúng đắn. Thực tế dạy và học cho chúng ta thấy còn có nhiều vấn đề cần phải giải quyết như học sinh học hình học còn yếu, chưa hình thành được kỹ năng, kỹ xảo trong quá trình giải toán hình học không gian. Đặc biệt năm học 2017- 2018, là năm học có nội dung trắc nghiệm Toán lớp 11 kỳ thi THPT Quốc gia, những học sinh sử dụng kết quả môn Toán để xét Đại học - Cao đẳng cần phải làm được câu hỏi về mức độ vận dụng, đặc biệt là những câu hỏi vận dụng về tính khoảng cách trong hình học không gian. Để làm được câu hỏi dạng này đòi hỏi học sinh ngoài việc học tốt kiến thức về hình học không gian còn phải biết vận dụng linh hoạt các phương pháp để từ đó qui bài toán khó về dễ và phù hợp với trình độ kiến thức mình đang có đặc biệt là kỹ năng phân tích, xác định phương pháp và tính toán nhanh để đạt được yêu cầu kiến thức lẫn thời gian của một câu hỏi trắc nghiệm.

Từ thực tiễn giảng dạy và bồi dưỡng học sinh ôn thi đại học nhiều năm, cùng với kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy. Tôi xin chia sẻ “ **Một số giải pháp giúp học sinh 12 phát huy khả năng giải bài toán Khoảng cách trong hình học không gian ở kỳ thi THPT Quốc gia** ”.

Đây là một nội dung quan trọng, hay và khó trong chương trình Hình học lớp 11 nên đã có rất nhiều tài liệu, sách viết cũng như rất nhiều thầy cô giáo và học sinh say sưa nghiên cứu và học tập. Tuy nhiên việc đưa ra hướng tiếp cận và quy lạ về quen đối với bài toán này nhiều sách tham khảo vẫn chưa đáp ứng được cho người đọc. Đặc biệt nhiều em học sinh lớp 12 quên đi phương pháp tính khoảng cách trong không gian mà các em được học ở lớp

11. Chính vì vậy việc đưa ra sáng kiến kinh nghiệm này là cần thiết, làm các em hiểu sâu hơn về bài toán này và yêu thích chủ đề khoảng cách trong hình học không gian.

Trong sáng kiến kinh nghiệm này Tôi đưa ra ba giải pháp để giải quyết bài toán khoảng cách trong hình học không gian:

***Giải pháp 1:** Vận dụng định nghĩa khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và mặt phẳng để giải quyết các bài toán khoảng cách.*

***Giải pháp 2:** Vận dụng thể tích, tỷ số thể tích của tứ diện để giải quyết bài toán khoảng cách trong hình học không gian.*

***Giải pháp 3:** Vận dụng phương pháp tọa độ hóa để giải quyết bài toán khoảng cách trong hình học không gian.*

Qua nội dung đề tài này Tôi mong muốn cung cấp cho người đọc nắm được cách tiếp cận bài toán, quy lạ về quen, đồng thời giúp cho học sinh một số kiến thức, phương pháp và các kỹ năng cơ bản để học sinh có thể giải quyết các bài toán khoảng cách trong hình học không gian, hình thành cho các em thói quen phân tích, tìm tòi tích lũy và rèn luyện tư duy sáng tạo, tự tìm ra phương pháp giải quyết các bài toán nói chung và bài toán khoảng cách trong không gian nói riêng. Từ đó các em có hành trang kiến thức chuẩn bị tốt và đạt kết quả cao trong kỳ thi THPT Quốc gia.

Tôi tập trung nghiên cứu một số tính chất về khoảng cách, nghiên cứu về câu hỏi khoảng cách trong hình học không gian ở dạng trắc nghiệm khách quan, nghiên cứu về ứng dụng của thể tích và phương pháp tọa độ trong không gian vào bài toán khoảng cách trong hình học không gian.

Trong phạm vi của đề tài, Tôi sử dụng kết hợp các phương pháp như: phương pháp thống kê – phân loại; phương pháp phân tích – tổng hợp- đánh giá; phương pháp vấn đáp - gợi mở, nêu ví dụ; phương pháp diễn giải, phương pháp dạy học dự án... và một số phương pháp khác như phương pháp quy lạ về quen, kỷ thuật giải nhanh để có đáp án trong câu hỏi trắc nghiệm khách quan.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

Vấn đề Tôi nghiên cứu được dựa trên cơ sở nội dung Khoảng cách trong hình học không gian ở chương trình Hình học 11. Khi giải bài tập toán, người học phải được trang bị các kỹ năng suy luận, liên hệ giữa cái cũ và cái mới, giữa bài toán đã làm và bài toán mới. Các tiết dạy bài tập của một chuyên đề phải được thiết kế theo hệ thống chuẩn bị sẵn từ dễ đến khó nhằm phát triển tư duy cho học sinh trong quá trình giảng dạy, phát huy tính tích cực của học sinh. Hệ thống bài tập giúp học sinh có thể tiếp cận và nắm bắt những kiến thức cơ bản nhất, và dần dần phát triển khả năng tư duy, khả năng vận dụng các kiến thức đã học một cách linh hoạt vào giải toán và trình bày lời giải. Từ đó học sinh có hứng thú và động cơ học tập tốt .Trong quá trình giảng dạy nội dung khoảng cách của Hình học không gian lớp 11 và ôn tập thi THPT Quốc gia lớp 12 của trường THPT Nguyễn Thái Học, Tôi thấy kỹ năng giải bài toán khoảng cách của học sinh còn yếu, đặc biệt là các bài toán trắc nghiệm đòi hỏi thời gian ngắn đa số các em bỏ qua. Do đó cần phải cho học sinh tiếp cận bài toán một cách dễ dàng, quy lạ về quen, thiết kế trình tự bài giảng hợp lý giảm bớt khó khăn giúp học sinh nắm được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp, kĩ năng, kĩ xảo và lĩnh hội lĩnh kiến thức mới, xây dựng kỹ năng làm các bài toán trắc nghiệm khách quan, từ đó đạt kết quả cao nhất có thể được trong kiểm tra, đánh giá và kỳ thi THPT Quốc gia.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Nội dung khoảng cách trong hình học không gian là một phần kiến thức tương đối khó với học sinh. Học sinh rất nhanh quên và không vận dụng được những kiến thức đã học vào giải toán. Trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2018, nội dung này đưa ra dưới hình thức trắc nghiệm. Với tình hình ấy để giúp học sinh định hướng tốt hơn trong quá trình giải bài toán khoảng cách, người giáo viên cần tạo cho học sinh thói quen tiếp cận bài toán, khai thác các

yếu đặc trưng của bài toán để tìm lời giải. Trong đó việc hình thành cho học sinh kỹ năng *quy lạ về quen, quy cái chưa biết về cái đã có.*

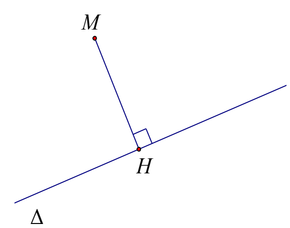
Chính vì vậy đề tài này đưa ra giúp giáo viên hướng dẫn bài toán khoảng cách cho học sinh với cách tiếp cận dễ hơn, giúp học sinh có điều kiện hoàn thiện các phương pháp và rèn luyện tư duy sáng tạo của bản thân, chuẩn bị tốt cho kỳ thi THPT Quốc gia.

Vậy tôi mong muốn các đồng nghiệp và học sinh ngày càng vận dụng tốt các kiến thức khoảng cách trong hình học không gian để đưa ra những giải pháp nhằm giải quyết bài toán khoảng cách một cách nhạn chóng, chính xác và hiệu quả nhất.

2.3. Các biện pháp thực hiện

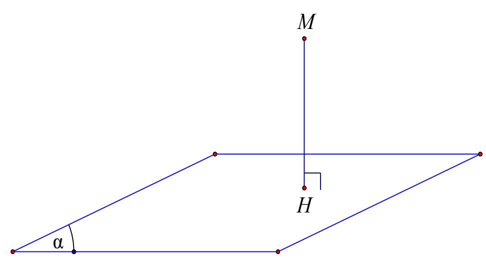
2.3.1. Một số kiến thức cần nhớ

2.3.1.1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:



* Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách từ nó đến hình chiếu vuông góc H của M lên đường thẳng Δ. Ký hiệu $d(M,\Delta)=MH$

2.3.1.2. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:



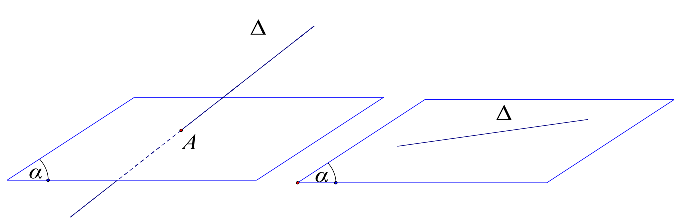
* Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là khoảng cách từ M đến hình chiếu vuông góc H của M lên mặt phẳng (α).

Ký hiệu $d(M,(\alpha))=MH$.

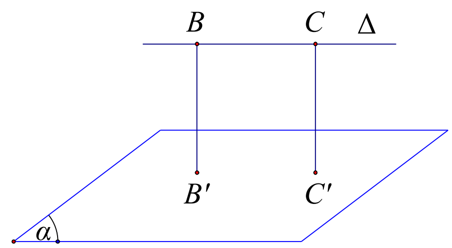
2.3.1.3. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α).

* Nếu a và (α) cắt nhau hoặc $a\subset(\alpha)$ thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.



* Nếu a và (α) song song nhau thì khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) chính là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên a đến (α).

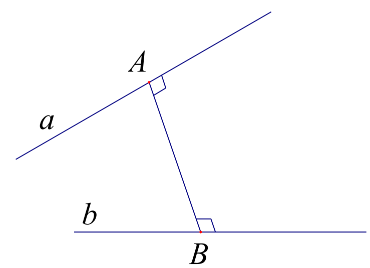


* Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) được ký hiệu $d(a;(\alpha))$.

2.3.1.3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Cho hai đường thẳng a,b chéo nhau.

* Đường thẳng Δ đồng thời vuông góc và cắt cả hai đường thẳng a,b được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b.



* Nếu $\Delta \cap a = A, \Delta \cap b = B$ thì đoạn thẳng AB được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a và b.

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng. Ký hiệu $d(a,b) = AB$.

<u>Chú ý:</u>

* Nếu a và b cắt nhau hoặc trùng nhau thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

$$d(a,b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a,b \text{ cắt nhau} \\ a \equiv b \end{array}\right.$$

* Nếu a và b song song với nhau thì $d(a,b) = d(M,b), \forall M \in a$

* Nếu $AB // (\alpha)$ thì $d(A,(\alpha)) = d(B,(\alpha))$

2.3.1.4.Thể tích của khối chóp:

Khối chóp có diện tích đáy là B, chiều cao là h có thể tích là: $V = \frac{1}{3}Bh$

2.3.1.5.Hệ thức lượng trong tam giác:

a. Hệ thức lượng trong tam giác vuông: Cho tam giác ABC vuông tại A, H là hình chiếu của A lên cạnh BC và M là trung điểm của cạnh BC. Ta có:

* Định lý Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

* Công thức cạnh góc vuông và hình chiếu:

$AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.BC$

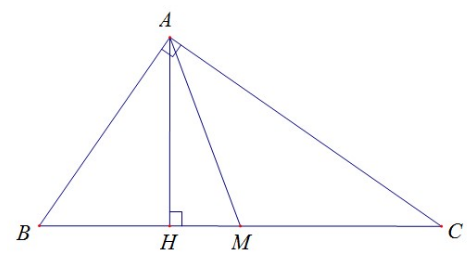
* Độ dài đường trung tuyến: $AM = MB = MC = \frac{BC}{2}$

* Độ dài đường cao: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}AH.BC$

$\sin B = \frac{AC}{BC}$; $\cos B = \frac{AB}{BA}$;

$\tan B = \frac{AC}{AB}$; $\cot B = \frac{AB}{AC}$



b. Hệ thức lượng trong tam giác đều:

Nếu tam giác ABC đều cạnh a. Ta có:

* Độ dài của đường cao là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

* Diện tích của tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c. Hệ thức lượng trong tam giác bất kỳ: Cho tam giác ABC, ta có:

**** Định lý côsin:***

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CA.\cos C$

$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA.AB.\cos A$

$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B$

Hệ quả:

$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$ $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC}$

$\cos C = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2.BC.CA}$

**** Định lý sin:*** $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác)

**** Định lý đường trung tuyến:***

$$m_a^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \qquad m_b^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có: $AG = \frac{2}{3}m_a$

* Công thức tính diện tích:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.BC.\sin B = \frac{1}{2}AC.BC.\sin C$$

$$= \frac{AB.BC.AC}{4R}$$

$$= \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}(Heroong) \quad p = \frac{AB+BC+CA}{2}$$

$$= pr$$

r, R lần lượt là bán k�nh đường tròn nội ti�p và ngoại ti�p tam giác

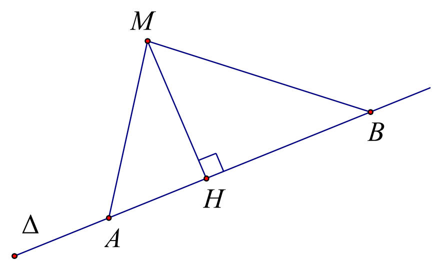
2.3.2. Các giải pháp

2.3.2.1. Giải pháp 1: Vận dụng định nghĩa khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và mặt phẳng để giải quyết các bài toán khoảng cách.

Trong giải pháp này giáo viên cần ôn lại kiến thức về hình học không gian, hệ thức lượng trong tám giác đặc biệt là hệ thức lượng trong tam giác vuông, định lý talet trong tam và hướng dẫn cho học sinh sử dụng linh hoạt chúng; giáo viên cần xây dựng các ví dụ đa dạng từ dạng đơn giản đến ví dụ đòi hỏi dạng tư duy, suy luận, có ví dụ ở dạng tự luận, có ví dụ ở dạng trắc nghiệm để học sinh thấy được khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng và mặt phẳng là một kiến thức qua trọng, là nền tảng để đi giải quyết các bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian.

Bài toán 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:

Trong bài toán này giáo viên cần hướng dẫn học sinh lựa chọn một tam giác có 1 đỉnh là điểm M và cạnh còn lại nằm trên đường thẳng Δ. Ta qui bài toán về tính độ dài đường cao của tam giác. Một bài toán mà đa số học sinh đã học qua và làm được bài.



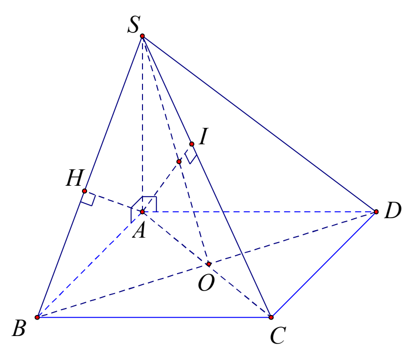
Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a tâm O, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy.

a. Hãy tính khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng SB và SC.

b. Hãy tính khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng SC và SD.

Giải:

a. **Tính** $d(A,SB)$.



Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Khi đó ta có $d(A,SB) = AH$ và AH là đường cao trong tam giác vuông SAB (vuông tại A)

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(A,SB) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ (đvđd)}$$

✵**Tính** $d(A,SC)$.

Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Khi đó ta có $d(A,SC) = AI$ và AI là đường cao trong tam giác vuông SAC (vuông tại A)

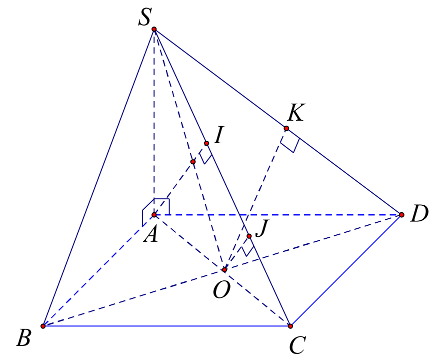
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ (vì AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ cạnh a)

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AI = a \quad \Rightarrow d(A,SC) = AI = a \text{ (đvđd)}$$

b. ***Tính*** $d(O,SC)$. Gọi J là hình chiếu của O lên SC. Khi đó ta có $d(O,SC)=OJ$ và OJ là đường cao trong tam giác SOC.

Ta có: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{2a^2+2a^2}=2a$,

$$S_{SOC}=\frac{1}{2}SA.OC=\frac{1}{4}SA.AC=\frac{a^2}{2}$$



Mặt khác:

$$S_{SOC}=\frac{1}{2}SC.OJ=\frac{1}{2}SC.d(O,SC)$$

$$\Rightarrow d(O,SC)=\frac{2S_{SOC}}{SC}=\frac{2.\frac{a^2}{2}}{2a}=\frac{a}{2}$$ (đvđd)

Cách khác: (Vận dụng định lý talet trong tam giác)

Trong tam giác SAC, ta có $OJ//AI$ (cùng vuông góc với SC) và O là trung điểm của $AC\Rightarrow OJ$ là đường trung bình trong tam giác

$SAC\Rightarrow OJ=\frac{1}{2}AH=\frac{a}{2}\ \Rightarrow d(O,SC)=\frac{a}{2}$ (đvđd).

✵ ***Tính*** $d(O,SD)$.

Gọi K là hình chiếu của O lên SD. Khi đó ta có $d(O,SD)=OK$ và OK là đường cao trong tam giác SOD.

Ta có: $OD=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ SO=\sqrt{SA^2+AO^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

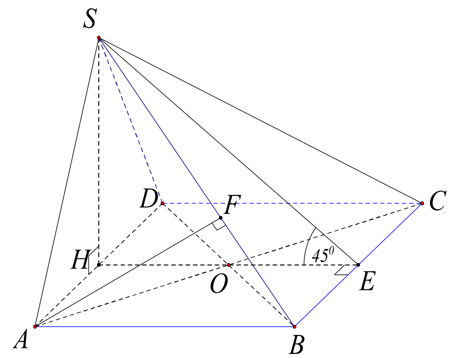
$$\left.\begin{matrix}SA\perp BD\\ AC\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow OD\perp SO\Rightarrow \Delta SOD$$ vuông tại O

$$\Rightarrow \frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OD^2}=\frac{2}{5a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{12}{5a^2}\Rightarrow OK=\frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$\Rightarrow d(O,SD)=OK=\frac{a\sqrt{15}}{6}$$ (đvđd)

<u>Ví dụ 2</u>: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình chữ nhật $AB = a, AD = 2a,$ mặt bên SAD là một tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, mặt bên SBC hợp với đáy một góc bằng 45^0. Tính khoảng cách từ điểm A và C đến đường thẳng SB.

<u>Giải</u>



❃**Tính** $d(A,SB)$

Gọi H,E lần lượt là trung điểm của AD,BC;

Ta có:

$$* \begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\ \Delta SAD \text{ cân tại } S\\ H \text{ là trung điểm của } AD\end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD)$$

$$* \begin{cases}HE\perp BC\\SH\perp BC\end{cases} \Rightarrow BC\perp(SHE)\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))}=\widehat{SEF}=45^0$$

* Trong tam giác vuông SHE, ta có $SH = HE.\tan\widehat{SEH} = a$

$$* \ AH=\frac{AD}{2}=a\Rightarrow SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=a\sqrt{2}.$$

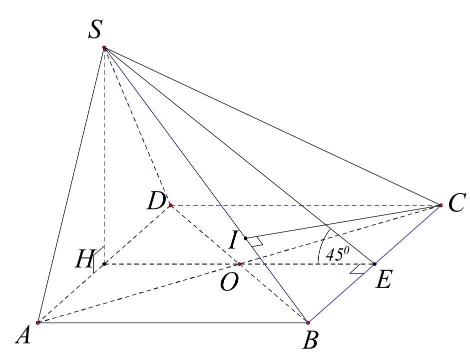
Gọi F là hình chiếu của A lên SB. Khi đó: $d(A,SB)=AF$

$$* \begin{cases}AD\perp AB\\SH\perp AB\end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow AB\perp SA$$

Trong tam giác vuông SAB, ta có $AF=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{2a^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy: $d(A,SB)=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ (đvđd)

❃ **Tính** $d(C,SB))$



Gọi I là hình chiếu của C lên SB. Khi đó: $d(C,SB)=CI$.

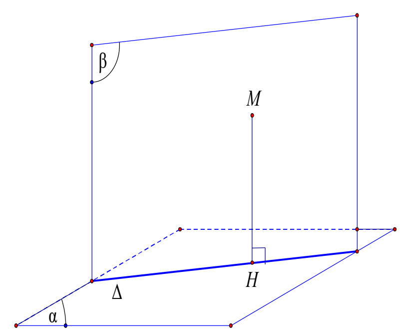
$SE=\dfrac{HE}{\cos\widehat{SEH}}=\dfrac{a}{\cos 45^0}=a\sqrt{2};\quad SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{3}$

$S_{SBC}=\dfrac{1}{2}BC.SE=\dfrac{1}{2}SB.CI\Rightarrow CI=\dfrac{BC.SE}{SB}=\dfrac{2a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d(C,SB)=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$ (đvđd).

Bài toán 2: Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) :

Trong bài toán này giáo viên cần hướng dẫn học sinh cách dựng hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng (α).



Phân tích: *Vì $MH\perp(\alpha)$ nên $MH\subset(\beta)$ với (β) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với (α). Gọi $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$. Khi đó: H là hình chiếu của M lên đường thẳng Δ.*

Từ đó ta có cách dựng hình chiếu H của M lên (α) như sau:

+ Dựng mặt phẳng (β) đi qua M và vuông góc với (α)

+ Dựng giao tuyến Δ của (α) và (β).

+ Dựng H là hình chiếu của M lên đường thẳng Δ. Khi đó: H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (α).

Thật vậy:

$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\perp(\beta)\\ \Delta=(\alpha)\cap(\beta)\\ MH\subset(\beta)\\ MH\perp(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow MH\perp(\alpha)\Rightarrow H$ là hình chiếu của M lên mặt phẳng (α)

Ta qui bài toán khoảng cách từ một điểm M đến mp(α) về bài toán khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.

Tuy nhiên có vô số mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện trên. Câu hỏi đặt ra là ta nên lựa chọn mặt phẳng nào trong vô số các mặt phẳng đó. Giáo viên cần phân tích, hướng dẫn học sinh lựa chọn mặt phẳng sao cho cách tính khoảng cách đơn giản, dễ tính nhất.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh $2a$ tâm O, cạnh bên SA vuông góc với đáy và cạnh bên SC hợp với đáy một góc 30^0.

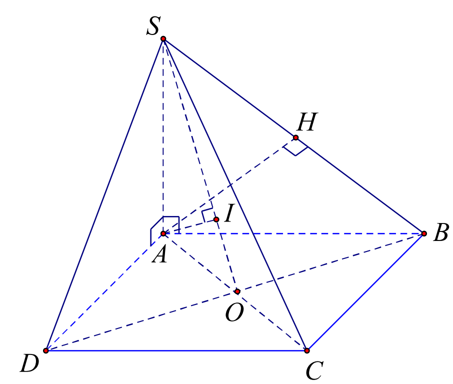
a. Hãy tính khoảng cách từ điểm A đến các mặt phẳng (SBC) và (SBD).

b. Hãy tính khoảng cách từ điểm O đến $mp(SBC)$.

c. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD. Hãy tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

Giải:

a. ***Tính*** $d(A,(SBC))$.



Phân tích: *Vì $SA \perp BC$ nên ta chỉ cần dựng hình chiếu của A lên BC là ta được mặt phẳng (β): chứa SA và đi qua hình chiếu của A lên BC.*

Vì $AB \perp BC$ nên B là hình chiếu của A lên $BC \Rightarrow (\beta) \equiv (SAB)$

Mà: $(SAB) \cap (SBC) = SB$

Nên: Hình chiếu của A lên (SBC) là hình chiếu của A lên SB.

Từ đó, Ta có cách giải như sau:

Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Ta có: $AH \perp SB (1)$

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH \perp (SBC) \Rightarrow H$ là hình chiếu của A lên $(SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$ (vì ΔSAC vuông tại A)

$\Rightarrow SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 2a\sqrt{2}.\tan 30^0 = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}.$

Trong tam giác SAB vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{8a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{8a^2}$$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}. \Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$ (đvđd)

Tương tự, ta cũng có cách tính $d(A,(SBD))$ như sau:

Gọi I là hình chiếu của A lên SO. Ta có: $AI \perp SO (3)$

$$\left.\begin{matrix} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AI (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $AI \perp (SBD) \Rightarrow I$ là hình chiếu của A lên (SBD).
$\Rightarrow d(A,(SBD)) = AI$

Trong tam giác SAO vuông tại A, ta có: $AO = \dfrac{1}{2}AC = a\sqrt{2}.$

$\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{7}{8a^2} \Rightarrow AI = \dfrac{2a\sqrt{14}}{7} \Rightarrow d(A,(SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{14}}{7}$ (đvđd)

b. ***Tính*** $d(O,(SBC))$.

Phân tích 1: *Vì* $(SAB) \perp (SBC)$ *nên ta chỉ cần dựng mặt phẳng* (β) *đi qua* O *và song song với* (SAB) *là ta có được mặt phẳng cần dựng. Gọi* M, N *lần lượt là giao điểm của* (β) *với các cạnh* SC, BC *Khi đó, ta có:*

$$\left.\begin{array}{l}(\beta)\cap(SAC)=OM\\(SAB)\cap(SAC)=SA\\(SAB)//(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow SA//OM\Rightarrow M$$

là trung điểm của SC.

Tương tự N *là trung điểm của* BC.

Và $(\beta)\cap(SBC)=MN$. *Do đó: Hình chiếu của* O *lên* MN *chính là hình chiếu của* O *lên* (SBC).

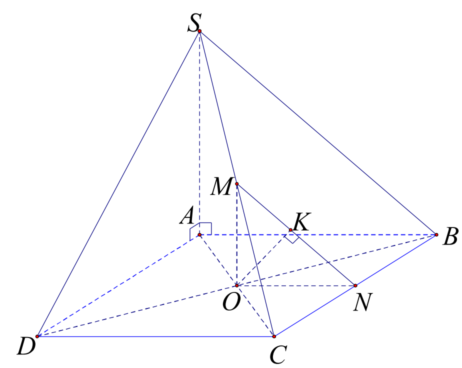
Từ đó, ta có cách giải như sau:

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SC và BC. Gọi K là hình chiếu của O lên MN.

Ta có: $NK\perp MN(5)$

$$\left.\begin{array}{l}OM//SA,SA\perp BC\Rightarrow BC\perp OM\\ON//AB,AB\perp BC\Rightarrow BC\perp ON\end{array}\right\}.$$

$\Rightarrow BC\perp(MON)\Rightarrow BC\perp OK\quad(6)$



Từ (5) và (6) suy ra: $OK\perp(SBC)\Rightarrow K$ là hình chiếu của O lên (SBC)

$\Rightarrow d(O,(SBC))=OK$.

Trong tam giác SAC ta có OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM//SA,OM=\frac{1}{2}SA=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác ABC ta có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON//AB,ON=\frac{1}{2}AB=a.$

Mà $SA\perp AB$ nên $OM\perp ON\Rightarrow\ \Delta OMN$ vuông tại O

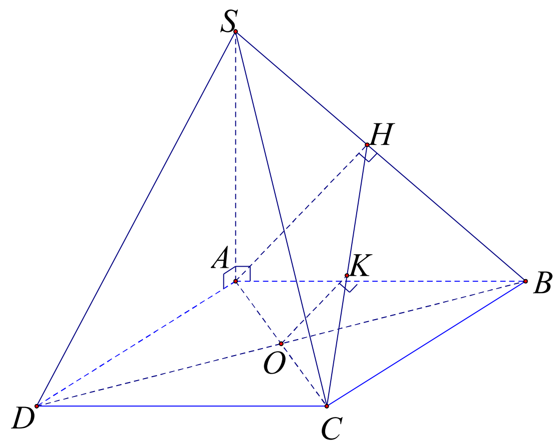
$\Rightarrow\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{5}{2a^2}\Rightarrow OK=\frac{a\sqrt{10}}{5}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{a\sqrt{10}}{5}$ (đvđd)

Phân tích 2: *Vì O là trung điểm của AC nên hình chiếu K của O lên (SBC) là trung điểm của hình chiếu của đoạn thẳng AC lên (SBC).*

Mà HC là hình chiếu của AC lên (SBC).

Nên K là trung điểm của đoạn thẳng HC.

Từ đó ta có cách giải khác như sau:



Gọi K là trung điểm của HC.

Trong tam giác AHC có: OK là đường trung bình $\Rightarrow OK // AH$ và $OK = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Vì $AH \perp (SBC)$ nên $OK \perp (SBC) \Rightarrow K$ là hình chiếu của O lên mp(SBC)

$\Rightarrow d(O,(SBC)) = OK = \frac{a\sqrt{10}}{5}$ (đvđd)

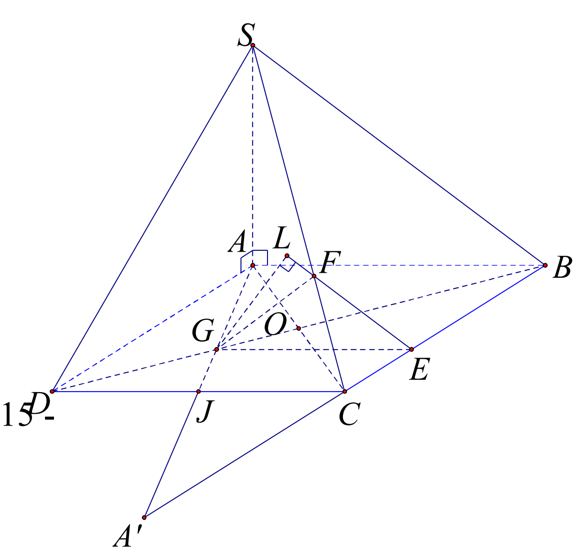
*** *Tính*** $d(G,(SBC))$**.**

Phân tích 1: *Vì $(SAB) \perp (SBC)$ nên ta chỉ cần dựng mặt phẳng (α) đi qua G và song song với (SAB) là ta có được mặt phẳng cần dựng. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh BC, SC Khi đó, ta có:*

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) \cap (ABCD) = GE \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) // (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow AB // GE$$

Tương tự $EF // SB$

Và $(\alpha) \cap (SBC) = EF$. Do đó: Hình chiếu của G lên EF chính là hình chiếu của G lên $(SBC) \Rightarrow$



$d(G,(SBC))$ *chính là chiều cao đỉnh* G *của tam giác* GEF.

Từ đó, ta có cách giải như sau:

Gọi E là điểm trên cạnh BC, F là điểm trên cạnh SC sao cho $GE//AB, EF//SB$. Gọi L là hình chiếu của G lên EF.

Khi đó, ta có: $GL \perp EF$ (7).

$$\left.\begin{array}{l} GE//AB, AB \perp BC \Rightarrow BC \perp GE \\ EF//SB, SB \perp BC \Rightarrow BC \perp EF \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow BC \perp (GEF) \Rightarrow BC \perp GL \qquad (8)$

Từ (7) và (8) suy ra: $GL \perp (SBC) \Rightarrow L$ là hình chiếu của G lên (SBC) $\Rightarrow d(G,(SBC)) = GL.$

Gọi J là trung điểm của CD, A' là giao điểm của AG với BC. Khi đó: J cũng là trung điểm của đoạn thẳng AA' (Vì JC là đường trung bình của $\Delta A'AB$)

Trong tam giác ABC ta có: $GE//AB$

$$\Rightarrow \frac{GE}{AB} = \frac{A'E}{A'B} = \frac{A'G}{A'A} = \frac{A'J}{A'A} + \frac{JG}{A'A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE = \frac{2}{3}AB = \frac{4a}{3}$$

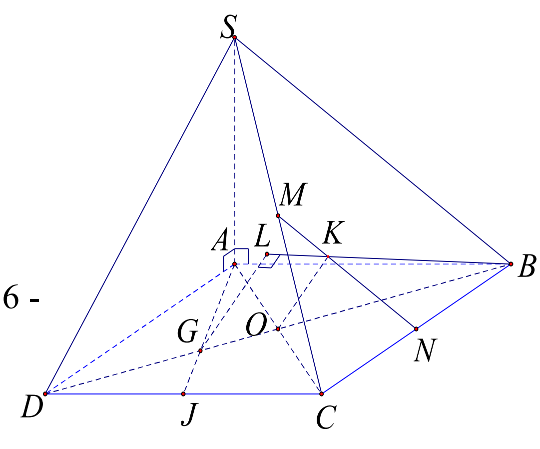
Vì $GE//AB, EF//SB$ nên $\sin\widehat{FEG} = \sin\widehat{SBA} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Trong tam giác GLE vuông tại L, ta có: $GL = GE.\sin\widehat{FEG} = \frac{4a\sqrt{10}}{15}$.

Vậy $d(G,(SBC)) = \frac{4a\sqrt{10}}{15}$ (đvđd).

Phân tích 2: *Vì* G *nằm trên đường thẳng* BO *nên hình chiếu* L *của* G *lên* (SBC) *nằm trên hình chiếu* BK *của* BO *lên* (SBC).

Từ đó ta có cách giải 2:



Gọi L là hình chiếu của G lên đường thẳng BK.

Trong tam giác BGL ta có: $GL//OK$ (vì cùng vuông góc với BL).

Mà: $OK \perp (SBC)$ nên $GL \perp (SBC) \Rightarrow L$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng (SBC) $\Rightarrow d(G,(SBC)) = GL$.

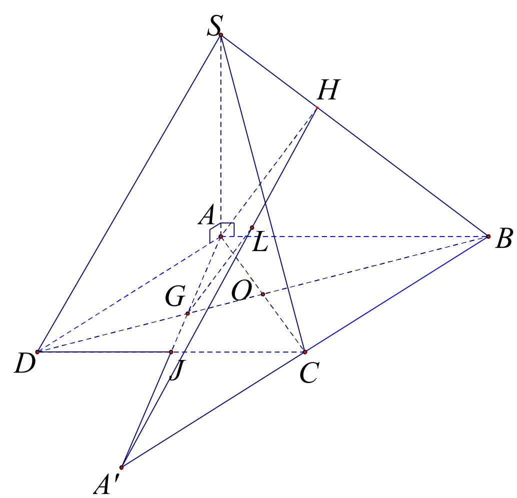
$$\frac{GL}{OK} = \frac{GB}{OB} = \frac{GO}{OB} + \frac{OB}{OB} = \frac{4}{3} \Rightarrow GL = \frac{4}{3}OK = \frac{4a\sqrt{10}}{15}$$

$d(G,(SBC)) = \dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$ (đvđd).

Phân tích 3: *Vì G nằm trên đường thẳng $A'A$ nên hình chiếu L của G lên (SBC) nằm trên hình chiếu $A'H$ của $A'A$ lên (SBC).*

Từ đó ta có cách giải 3:

Gọi L là hình chiếu của G lên đường thẳng $A'H$.



Trong tam giác $A'AH$ ta có: $GL//AH$ (vì cùng vuông góc với $A'H$).

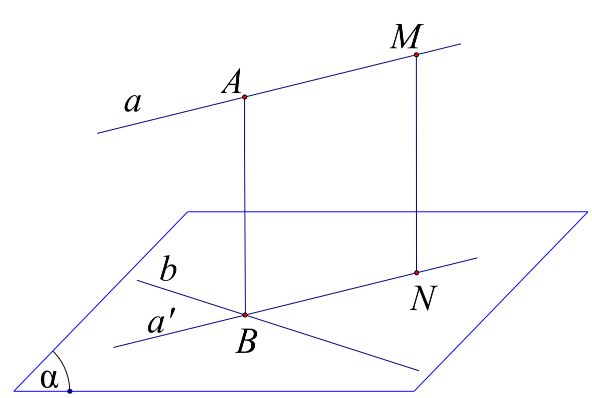
Mà: $AH \perp (SBC)$ nên $GL \perp (SBC) \Rightarrow L$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng (SBC) $\Rightarrow d(G,(SBC)) = GL$.

$$\frac{GL}{AH} = \frac{A'G}{A'A} = \frac{A'J}{A'A} + \frac{JG}{AA'} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow GL = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$ $d(G,(SBC)) = \dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$ (đvđd).

Bài toán 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :

Trong bài toán này giáo viên cần hướng dẫn học sinh tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng cách áp dụng kiến thức " ***Nếu*** (α) ***là mặt***



phẳng chứa đường thẳng b và song song với a thì $d(a,b) = d(a;(\alpha)) = d(M,(\alpha))$, với M là một điểm bất kỳ nằm trên a."

Thật vậy: Gọi $AB(A \in a, B \in b)$ là đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng a và b. Ta có: $d(a,b) = AB(*)$.

Gọi a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (α). Trên a lấy điểm M, gọi H là hình chiếu của M lên mp(α). Khi đó: $H \in a'$, $d(a,(\alpha)) = d(M,(\alpha)) = MH(**)$.

Ta có: $AB // MH$ (vì cùng vuông góc với (α).

$AM // BH$ ($a // (\alpha), a'$ là hình chiếu của a lên $(\alpha) \Rightarrow a' // a$)

Do đó: Tứ giác $ABHM$ là một hình bình hành $\Rightarrow AB = MH(***)$

Từ (*), (**) và (***) ta được: $d(a,b) = d(M,(\alpha))$

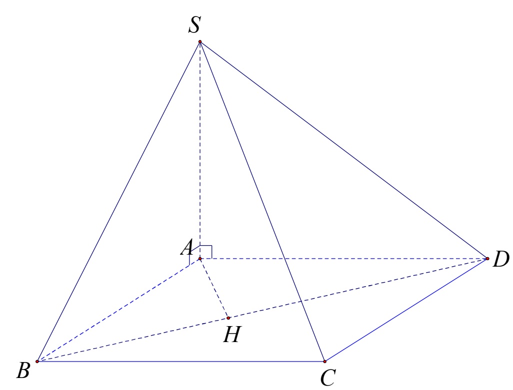
Ta qui bài toán khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về bài toán khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a,$ cạnh bên SA vuông góc với đáy và mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc bằng 60^0.

Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng đường thẳng chéo nhau:

a. SA và BD. b. AB và SC. c. BD và SC.

Giải:



a. $d(SA,BD)$

Gọi H là hình chiếu của A lên BD. Ta có:

$AH \perp BD$

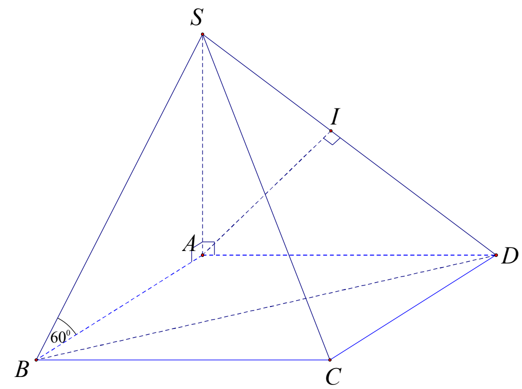
$$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ AH \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp AH$$

Do đó: AH là đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng SA và BD. $\Rightarrow d(SA,BD) = AH$.

Trong tam giác ABD vuông tại A ta có:

$$AH = \frac{AB.AD}{BD} = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $d(SA, BD) = AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



b. $d(AB, SC)$

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB//CD \\ AB \not\subset (SCD) \\ CD \subset (SCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB//(SCD)$

Mà $SC \subset (SCD)$ nên

$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Gọi I là hình chiếu của A lên SD. Ta có: $AI \perp SD(1)$

$$\left.\begin{matrix} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AI(2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $AI \perp (SCD) \Rightarrow I$ là hình chiếu của A lên (SCD)

$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AI$.

Vì $\left.\begin{matrix} SA \perp BC \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{cases}$ và $\begin{cases} AB \subset (ABCD) \\ SB \subset (SBC) \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases}$

nên $\widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$ (vì ΔSAB vuông tại A).

Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có:

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SAD vuông tại A, ta có:

$$AI = \frac{SA.AD}{SD} = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{3}.a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

Vậy $d(AB, SC) = d(A, (SCD)) = AI = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$ (đvđd)

c. $d(BD,SC)$

Phân tích: *Gọi (α) là mặt phẳng chứa BD và song song với SC. Gọi O là tâm của đáy, M là giao điểm của (α) với SA.*

Ta có: $\left.\begin{array}{l}(\alpha)//SC\\(\alpha)\cap(SAC)=OM\\SC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow OM//SA$

Mà O là trung điểm của AC nên M là trung điểm của SA.

Từ đó, ta có cách giải như sau:

Gọi M là trung điểm của SA, O là tâm của $ABCD$.

Ta có: OM là đường trung bình trong tam giác $SAC \Rightarrow OM//SC$.

Mặt khác $OM\subset(OBD), SC\not\subset(OBD)$

Do đó: $SC//(OBD)$

Mà: $BD\subset(OBD)$ nên $d(BD,SC)=d(SC,(OBD))=d(C,(OBD))$ (3)

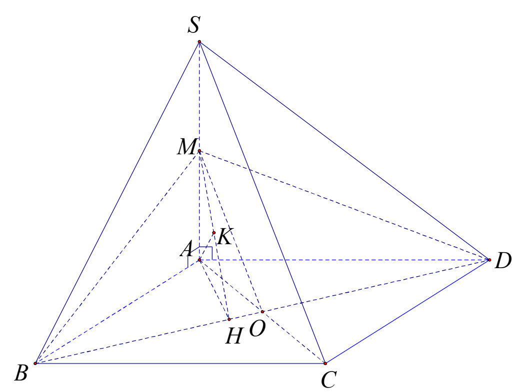
Vì (OBD) đi qua trung điểm O của AC

nên $d(C,(OBD))=d(A,(OBD))$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$d(BD,SC)=d(A,(OBD))$.

Gọi K là hình chiếu của A lên MH. Ta có: $AK\perp MH$ (5)



$\left.\begin{array}{l}BD\perp AH\\BD\perp SA\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAH)\Rightarrow BD\perp AK$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $AK\perp(OBD)\Rightarrow K$ là hình chiếu của A lên (OBD)

$\Rightarrow d(A,(OBD))=AK$

Trong tam giác OAH vuông tại A, ta có:

$$AK=\frac{AM.AH}{HM}=\frac{SA.AH}{2\sqrt{\frac{SA^2}{4}+AH^2}}=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

Vậy $d(BD,SC)=d(A,(OBD))=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$ (đvđd)

Bài toán 4: Tính khoảng cách trong bài toán trắc nghiệm:

Nếu học sinh đã nắm thành thạo được cách dựng hình chiếu của một điểm xuống một mặt phẳn, cách xác định khoảng cách trong không gian thì việc áp dụng nó vào bài toán trắc nghiệm là một lợi thế rất lớn vì khi làm toán trắc nghiệm ta chỉ cần tính nhanh ra đáp số mà không cần thực hiện thao tác chứng minh dài dòng khi ta chắn chắn điều đó là hoàn toàn đúng. Điều đó được thể hiện trong các ví dụ sau:

Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a,$ góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60^0.

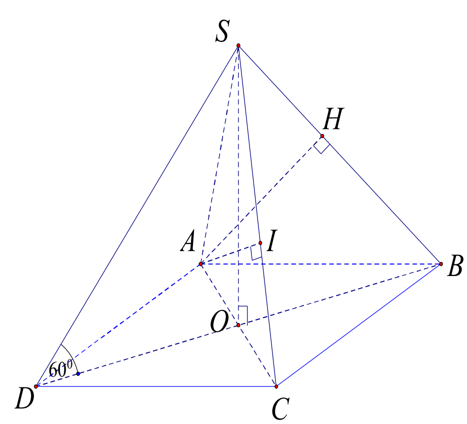
a. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

b. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. a. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

<u>Hướng dẫn:</u>



Gọi H là hình chiếu của A lên SB, M là trung điểm của AB.

Ta có: $d(A,SB)=AH$. $AM=\dfrac{a}{2}, SM\perp AB$

Gọi O là tâm của $ABCD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)\Rightarrow DO$ là hình chiếu của SD lên $(ABCD)$

$\Rightarrow (\widehat{SD,(ABCD)}) = (\widehat{SD,DO}) = \widehat{SDO} \Rightarrow \widehat{SDO} = 60^0$;

$SO = OD.\tan\widehat{SDO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$;

Ta có ΔSBD cân và $\widehat{SDB} = 60^0 \Rightarrow \Delta SBD$ đều $\Rightarrow SB = a\sqrt{2}.$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AB.SM = \frac{1}{2}SB.AH \Rightarrow AH = \frac{AB.SM}{SB} = \frac{a.\frac{a\sqrt{7}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Đáp án A.

b. Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Ta có: $d(A,SC) = AI$

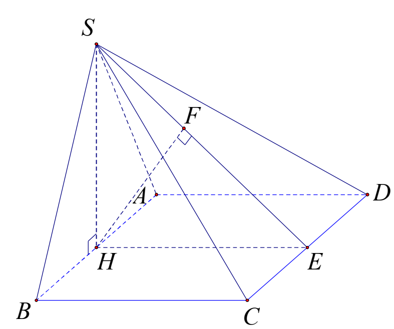
Tam giác SAC đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow d(A,SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Đáp án C.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi H là trung điểm của AB. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) tính theo a bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{5}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Hướng dẫn:



Gọi E là trung điểm của CD, F là hình chiếu của F lên SE. Khi đó $d(H,(SCD)) = AF$.

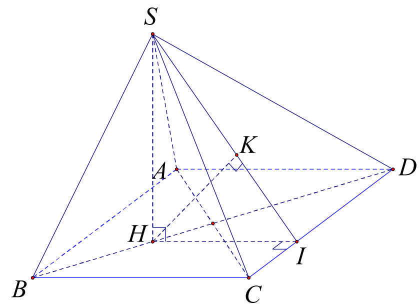
Trong tam giác SHE vuông tại H, ta có:

$$HF = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \textbf{Đáp án C}$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình thoi cạnh a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) biết $SABC$ là một tứ diện đều.

A. $\frac{2a\sqrt{15}}{15}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{4a\sqrt{15}}{45}$. D. $\frac{2a\sqrt{15}}{45}$.

Hướng dẫn:



Gọi H là tâm của ΔABC; I,K lần lượt là hình chiếu của H lên CD và SI. Khi đó, ta có: $SH\perp(ABCD)$ và $d(H,(SCD))=HK$.

Ta có: $HI//BC\Rightarrow\frac{HI}{BC}=\frac{DH}{DB}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow HI=\frac{2}{3}BC=\frac{2a}{3}$.

$$BH=\frac{1}{3}BD=\frac{a\sqrt{2}}{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$HK=\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2}}=\frac{2a\sqrt{15}}{15}$$

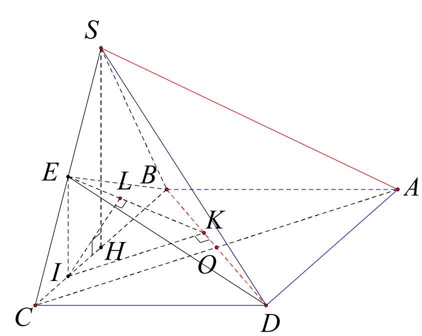
Vì $AB//(SCD)$ nên $d(A,(SCD))=d(B,(SCD))$

Vì $BD=\frac{3}{2}HD$ nên $d(B,(SCD))=\frac{3}{2}d(H,(SCD))=\frac{a\sqrt{15}}{5}$ $\Rightarrow$ **Đáp án B.**

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD tính theo a bằng:

A. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn:



Gọi H,I,E lần lượt là trung điểm của BC, CH và $SC;K,L$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên BD và EK. Khi đó:

* $SA//(EBD) \Rightarrow d(SA,BD) = d(A,(EBD))$.

* $\begin{cases} O \in (EBD) \\ O \text{ là trung điểm của } AC \end{cases} \Rightarrow d(A,(EBD)) = d(C,(EBD))$

* $BC = \frac{4}{3}BI \Rightarrow d(C,(EBD)) = \frac{4}{3}d(I,(EBD)) = \frac{4}{3}IL$.

Do đó: $d(SA,BD) = \frac{4}{3}IL$.

* $\begin{cases} EI = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ IK = \frac{3}{4}CO = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow IL = \frac{EI.IK}{\sqrt{EI^2 + IK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$

$\Rightarrow d(SA,BD)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ $\Rightarrow$ **Đáp án D.**

2.3.2.2. Giải pháp 2: Vận dụng thể tích, tỷ số thể tích của tứ diện để giải quyết bài toán khoảng cách trong hình học không gian

Trong giải pháp 1 để tính khoảng cách trong hình học không gian đòi hỏi học sinh phải biết cách dựng hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng và mặt phẳng. Tuy nhiên, đối với học sinh yếu việc dựng hình chiếu đối với mình hơi quá sức. Để khắc phục điều đó, trong giải pháp này, giáo viên cần hướng dẫn cho học sinh biết sử dụng linh hoạt công thức tính thể tích của một tứ diện, công thức tỷ số thể tích để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng dễ dàng hơn, không cần phải dựng hình chiếu; học sinh sẽ có động lực nghiên cứu, đam mê và yêu thích nội dung này.

Kiến thức trong giải pháp này là:

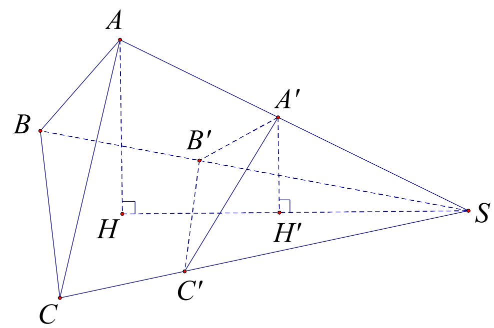
* $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.d(A,(BCD)) \Rightarrow d(A,(BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}$

* Tỷ số thể tích: Cho hình chóp $S.ABC$, trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Khi đó ta có: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

Thật vậy: Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, A' lên (SBC).

Vì S, A, A' thẳng hàng nên S, H, H' cũng thẳng hàng.

Ta có: $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{SBC}.AH = \frac{1}{6}AH.SB.SC.\sin\widehat{BSC}$



$V_{SA'B'C'} = \frac{1}{3}S_{SB'C}.A'H' = \frac{1}{6}A'H'.SB'.SC'.\sin\widehat{BSC}$

Do đó: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

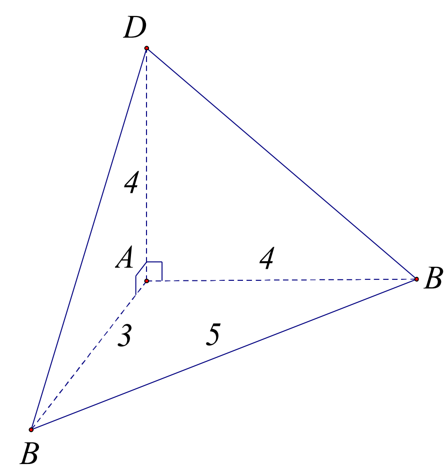
Trong tam giác SAH, ta có

$A'H'//AH \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{SA}{SA'}$

Vậy: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

Ví dụ 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc mặt phẳng (ABC), $AD = AC = 4cm$, $AB = 3cm, BC = 5cm.$ Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).

Giải:



Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB \perp AC$

Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.AC.AD = 8cm^2$

Mặt khác CD = $4\sqrt{2}$, BD = BC = 5

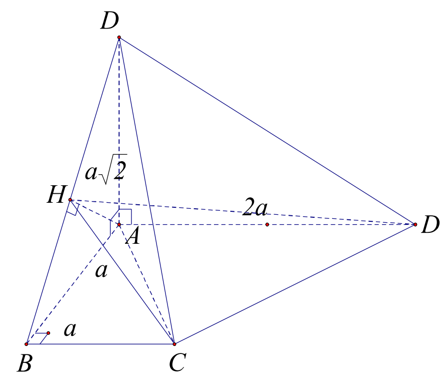
Nên ΔBCD cân tại B, gọi I là trung điểm của CD

$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}DC.BI = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{34}$

Vậy $d(A,(BCD))=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{3.8}{2\sqrt{34}}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$

<u>Ví dụ 10:</u> Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2a, BA=BC=a,$ cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Tính theo a khoảng cách từ H đến mp$\left(SCD\right)$.

<u>Giải</u>:



Ta có $\dfrac{V_{S.HCD}}{V_{S.BCD}}=\dfrac{SH}{SB}$

ΔSAB vuông tại A và AH là đường cao nên

Ta có $SA^2=SH.SB$

$\Rightarrow \dfrac{SH}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\dfrac{2a^2}{2a^2+a^2}=\dfrac{2}{3}$

Vậy $V_{S.HCD}=\dfrac{2}{3}V_{S.BCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}a\sqrt{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$

Mà $V_{S.HCD}=\dfrac{1}{3}d(H,(SCD)).S_{\Delta SCD}\Rightarrow d(H,(SCD))=\dfrac{3V_{S.HCD}}{S_{\Delta SCD}}$.

ΔSCD vuông tại C (do $AC^2+CD^2=AD^2$),

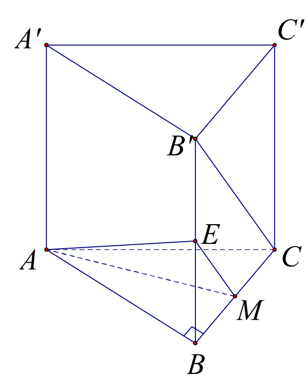
Do đó $S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}CD.SC=\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.2a=a^2\sqrt{2}$.

Vậy $d(H,(SCD))=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{9a^2\sqrt{2}}=\dfrac{a}{3}$

Ví dụ 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a, AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC.

Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

<u>Giải:</u>



Gọi E là trung điểm của BB' $\Rightarrow BE = \frac{1}{2}BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: EM là đường trung bình trong $\Delta B'BC$ $\Rightarrow$ $EM // CB'$

Mà $EM \subset (AME), B'C \not\subset (AME)$ nên $B'C // \left(AME\right)$

$\Rightarrow d\left(B'C, AM\right) = d\left(B'C, \left(AME\right)\right) = d\left(C, \left(AME\right)\right)$

Ta có $EB \perp (AMC) \Rightarrow$ EB là đường cao của khối tứ diện $CEAM$

$$V_{CAEM} = \frac{1}{3}S_{ACM}.BE = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.CM.BE = \frac{1}{6}.a.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Mặt khác: $V_{CAEM} = \frac{1}{3}S_{AEM}.d(C,(AEM)) \Rightarrow d(C,(AME)) = \frac{3V_{CAEM}}{S_{AEM}}$

Trong ΔAEB vuông tại B ta có: $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Gọi H là hình chiếu của B lên AE. Ta có $AE \perp (BHM) \Rightarrow AE \perp MH$

ΔABE vuông tại B nên $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{EB^2} = \frac{3}{a^2}$ $\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔBHM vuông tại B nên $MH = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

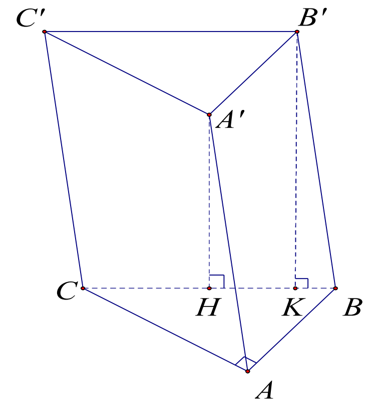
Do đó $S_{\Delta AEM} = \frac{1}{2}AE.HM = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{a^2\sqrt{14}}{8}$

Vậy: $d(AM, CB') = d(C,(AME)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{24.\frac{a^2\sqrt{14}}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$ (đvđd)

<u>Ghi chú</u>: Có thể áp dụng công thức Hê – rông để tính S_{AEM}

Ví dụ 12: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ A đến mp$\left(BCC'B'\right)$

Giải:



Theo giả thiết ta có A'H ⊥ (ABC).

Tam giác ABC vuông tại A và AH là trung tuyến nên AH = $\frac{1}{2}$BC = a. $\Delta A'AH$ vuông tại H nên ta có $A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=a\sqrt{3}$

Do đó $V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}\frac{a.a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{2}$.

Mặt khác $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}$

Suy ra $V_{A'.BCC'B'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2}{3}.3.\frac{a^3}{2}=a^3$

Ta có $d(A',(BCC'B'))=\frac{3V_{A'.BCC'B'}}{S_{BCC'B'}}$

Vì $AB\perp A'H\Rightarrow A'B'\perp A'H\Rightarrow\Delta A'B'H$ vuông tại A'

Suy ra B'H = $\sqrt{a^2+3a^2}=2a=BB'$. $\Rightarrow\Delta BB'H$ cân tại B'. Gọi K là trung điểm của BH, ta có $B'K\perp BH$. Do đó $B'K=\sqrt{BB'^2-BK^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$

Suy ra $S_{BCC'B'}=B'C'.BK=2a.\frac{a\sqrt{14}}{2}=a^2\sqrt{14}$

Vậy $d(A',(BCC'B'))=\frac{3a^3}{a^2\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}a}{14}$

2.3.2.3. Giải pháp 3: Vận dụng phương pháp tọa độ hóa để giải quyết bài toán khoảng cách trong hình học không gian

Trong giải pháp 1,2 để tính khoảng cách trong hình học không gian đòi hỏi học sinh phải biết cách dựng hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng và mặt phẳng, biết cách xác định chiều cao của hình chóp, biết cách vận dụng kiến thức hệ thức lượng trong tam giác một cách linh hoạt. Tuy nhiên

đối với học sinh Trung bình – Yếu thì đôi khi còn quá khó vì kiến thức đó các em không còn nhớ. Để khắc phục điều đó, trong giải pháp này, giáo viên cần hướng dẫn cho học sinh biết cách xây dựng hệ trục tọa độ, chuyển bài toán hình học không gian thuần túy về giả thuyết là một bài toán trong tọa độ $Oxyz$, sử dụng linh hoạt kiến thức tọa độ mà các em học sinh 12 vừa được học để giải quyết bài toán khoảng cách là một cách làm hợp lý, học sinh sẽ thấy được việc học của mình có ứng dụng, giải quyết được một số bài toán mà trước đây mình thấy rất khó, không thể giải quyết được thì nay lại làm được một cách đơn giản và đặc biệt là giải trong bài toán trắc nghiệm thì quá hiệu quả. Từ đó, tạo động lực cho các em học tập, nghiên cứu, tìm tòi ra những ứng dụng mới cho kiến thức của mình được học và từ đó có niềm yêu toán học.

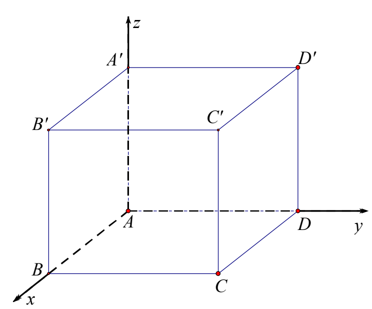
Các bước thực hiện của giải pháp này là:

❋ **<u>Bước 1:</u>** ***Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian và tìm tọa độ các điểm liên quan*** (*Chuyển giả thuyết hình học của bài toán thành giả thuyết tọa độ $Oxyz$*):

* Ta có: Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Do đó, nếu hình vẽ bài toán cho có chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các cạnh đó làm trục tọa độ. Cụ thể:

1. Với hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$.

Khi đó, ta thấy mỗi đỉnh của hình hộp chữ nhật đều có tính chất 3 đường thẳng đôi một vuông góc nên ta có thể chọn đỉnh nào làm gốc tọa độ đều được. Giả sử là đỉnh $A \equiv O$. Khi đó: 3 tia AB, AD, AA' lần lượt là 3 tia Ox, Oy, Oz.



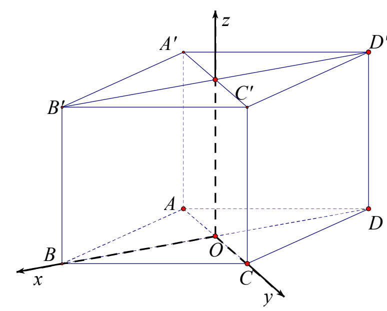
Khi đó, ta có: $A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;b;0)$; $D(0;b;0)$, $A'(0;0;c)$; $B'(a;0;c)$; $C'(a;b;c)$; $D'(0;b;c)$

2. Với hình hộp đứng đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

* Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$ /

* Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy, trục Ox, Oy là hai đường chéo của hình thoi $ABCD$.

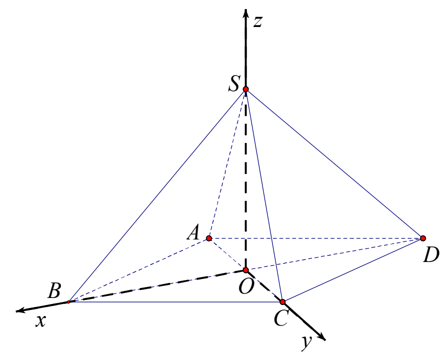


3. Với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ **:**

Nếu hình chóp $S.ABCD$ đáy có tâm là O và cạnh a, chiều cao là $SO = h$ thì ta chọn hệ trục tọa độ như sau:

* Chọn $O(0;0;0)$ là tâm của hình vuông.

*Trục Ox, Oy là hai đường chéo AC, BD và trục Oz là đường cao OS.

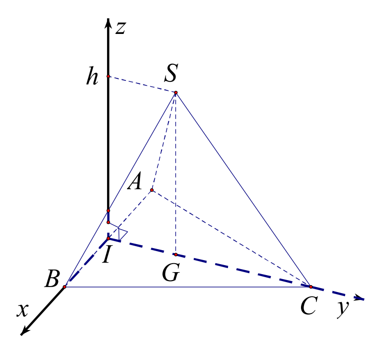


Khi đó: $A(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), C(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), B(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0), D(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0), S(0;0;h)$

4. Với hình chóp tam giác đều $S.ABC$ **:**

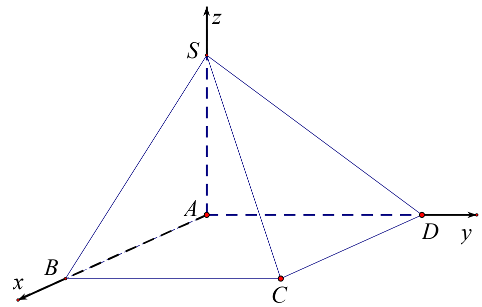
Giả sử cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ có tâm là $I(0;0;0)$, trục Ox chứa cạnh AB, trục Oy chứa đường cao IC của đáy và trục Oz là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (ABC) (song song với đường cao SG của hình chóp).



Khi đó: $I(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S(0;0;h)$

5. ***Với hình chóp*** $S.ABCD$ ***có*** $ABCD$ ***là hình chữ nhật và*** $SA\perp(ABCD)$

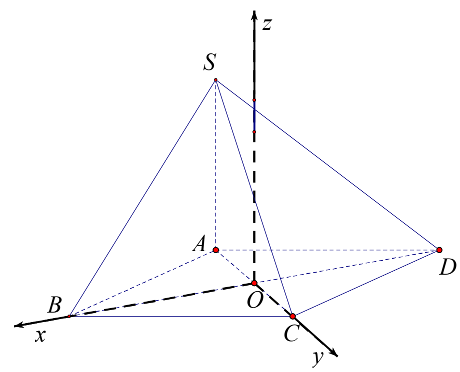


$ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a;AD=b$ và chiều cao bằng h

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O\equiv A,$ trục Ox chứa cạnh $AB,$ trục Oy chứa cạnh AD và trục Oz chứa cạnh AS.

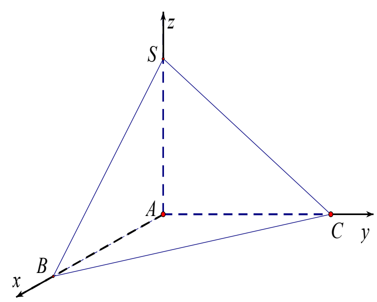
Khi đó: $A(0;0;0),B(a;0;0);C(a;0;0);D(0;b;0);S(0;0;h)$

6. ***Với hình chóp*** $S.ABCD$ ***có*** $ABCD$ ***là hình thoi và*** $SA\perp(ABCD)$



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là tâm O của hình thoi $ABCD$, cac trục Ox,Oy là hai đường chéo AC,BD của hình thoi và trục Oz là đường thẳng đi qua O và song song với cạnh SA.

7. ***Với hình chóp*** $S.ABC$ ***có*** $SA\perp(ABC)$ ***và*** ΔABC ***vuông tại*** $A.$



Tam giác ABC vuông tại A có $AB=a;AC=b$ và $SA=h$.

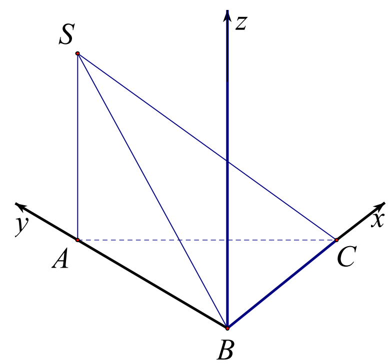
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là $O\equiv A$, trục Ox chứa cạnh $AB,$ trục Oy chứa cạnh AC và trục Oz chứa cạnh AS (như hình)

Khi đó: $A(0;0;0),B(a;0;0),\ C(0;b;0),\ S(0;0;h)$

8. ***Với hình chóp*** $S.ABC$ ***có*** $SA\perp(ABC)$ ***và*** ΔABC ***vuông tại*** B **:**

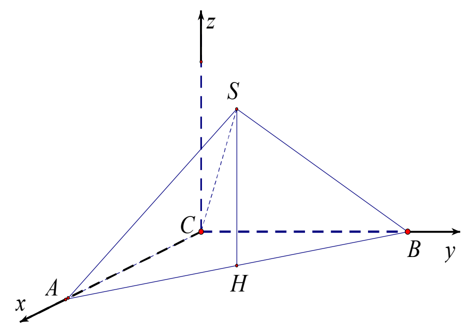
Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; BC = b$ và $SA = h$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là $O \equiv B$, trục Ox chứa cạnh BC, trục Oy chứa cạnh BA và trục Oz là đường thẳng đi qua B và song song với cạnh AS (như hình)



Khi đó: $B(0;0;0), C(b;0;0), A(a;0;0), S(0;0;h)$

9. Với hình chóp $S.ABC$ có ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, ΔABC vuông tại C:



Vì $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ SA = SB \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases}$ nên hình chiếu của S lên (ABC) l à trung điểm H của cạnh AB.

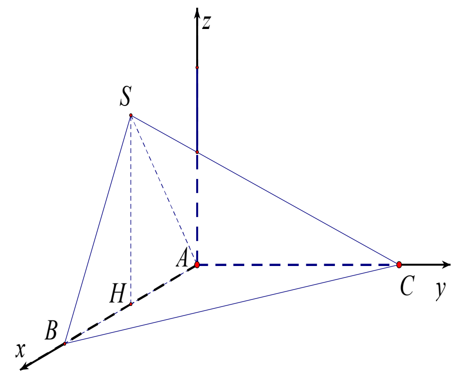
Nếu ΔABC vuông tại A có $AB = a; BC = b$ và hình chóp có chiều cao là h thì:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có $O \equiv C$, trục Ox chứa cạnh CA, trục Oy chứa cạnh CB và trục Oz là đường thẳng đi qua C và song song với SH .(như hình)

Khi đó: $C(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0), S\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};h\right)$.

10. Với hình chóp $S.ABC$ có ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, ΔABC vuông tại A:

Vì $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\ SA=SB\\ (SAB)\cap(ABC)=AB\end{cases}$ nên hình chiếu của S lên (ABC) l à trung điểm H của cạnh AB.



Nếu ΔABC vuông tại A có $AB=a; AC=b$ và hình chóp có chiều cao là h thì:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có $O\equiv A,$ trục Ox chứa cạnh $AB,$ trục Oy chứa cạnh AC và trục Oz là đường thẳng đi qua A và song song với SH .(như hình)

Khi đó: $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;b;0), S\left(\frac{a}{2};0;h\right).$

❋**Bước 2:** ***Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán:***

** Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng Δ:*

Nếu đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

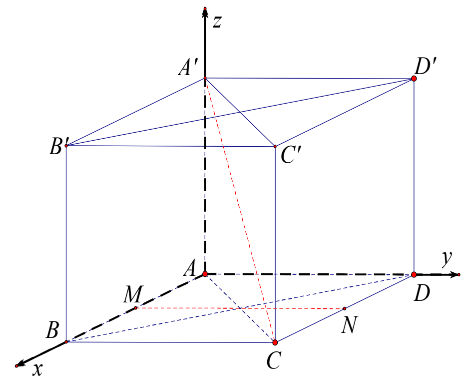
** Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_o;z_0)$ đến một mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$:*

$$d(M,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

** Khoảng cách giữa hia đường thẳng chéo nhau a và b:*

Nếu a đi qua điểm M_1 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, b đi qua điểm M_2 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$ thì $d(a,b)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$

Ví dụ 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN.



Giải:

Chọn hệ trục tọa độ với gốc tọa độ là $A(0;0;0)$, các trục Ax, Ay, Az lần lượt chứa các cạnh AB, AD và AA' (*như hình)*

Khi đó: $B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$.

Tọa độ trung điểm M của AB là $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$

Tọa độ trung điểm N của CD là $N\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(0;1;0)$, $\overrightarrow{A'C}=(1;1;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]=(1;0;1)$; $\overrightarrow{NC}=\left(\frac{1}{2};0;0\right)$

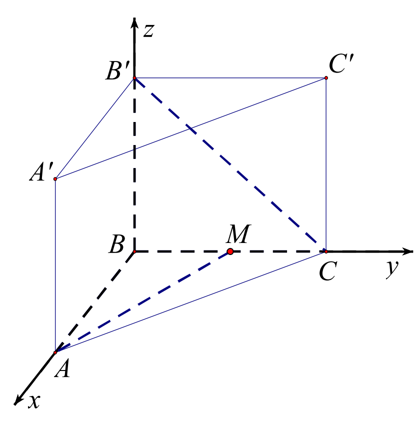
$$d(MN,A'C)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{NC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]\right|}=\frac{\left|1.\frac{1}{2}+0.0+1.0\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $d(MN,A'C)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ (đvđd)

Ví dụ 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a, AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với $B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;a;0), B'(0;0;a\sqrt{2})$



Khi đó: $M(0;\frac{a}{2};0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(-a;\frac{a}{2};0),\overrightarrow{B'C}=(0;a;-a\sqrt{2})$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{AM}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\sqrt{2};a^2\right)$; $\overrightarrow{AC}=(-a;a;0)$

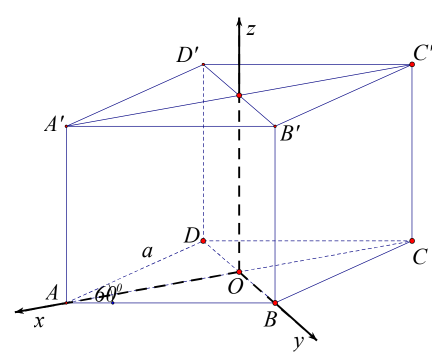
$$d(AM,B'C)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{AM}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.(-a)+a^2\sqrt{2}.a+a^2.0\right|}{\sqrt{\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)+(a^2\sqrt{2})^2+(a^2)^2}}=\frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Ví dụ 15: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=AD=a$, $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2},\widehat{BAD}=60^0$.Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $C'D'$ theo a.

<u>Giải</u>:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với $O(0;0;0)$.

Vì $AB=AD=a$ và $\widehat{BAD}=60^0$ nên ΔABD là tam giác đều cạnh $a\Rightarrow$ $BD=a$ và $AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Khi đó: $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),B\left(0;\frac{a}{2};0\right),$ $C'\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),D'\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Vì $AB//C'D'$ nên $d(AB,C'D')=d(C';AB)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right),\overrightarrow{AC'}=\left(-a\sqrt{3};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\frac{3a^2}{4};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

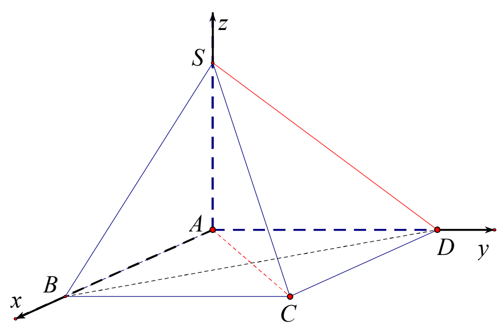
Vậy: $d(AB,C'D')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{3a^2}{4}\right)^2+\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+0^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$.

a. Tính khoảng cách từ điểm C đến (SBD).

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ như hình, với $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;a\sqrt{3})$.

Khi đó: $C(a;a;0)$

a. Tính $d(C,(SBD))$=?

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(-a;a;0), \overrightarrow{BS}=(0;-a;a\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=\left(a^2\sqrt{3};a^2\sqrt{3};a^2\right)$$

Mặt phẳng (SBD) đi qua điểm B và nhận $\vec{n}=(\sqrt{3};\sqrt{3};1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$$\sqrt{3}(x-a)+\sqrt{3}(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z-a\sqrt{3}=0$$

Vậy $d(C,(SBD))=\dfrac{\left|\sqrt{3}.a+\sqrt{3}.a+0-a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

b. $d(SD,AC)$

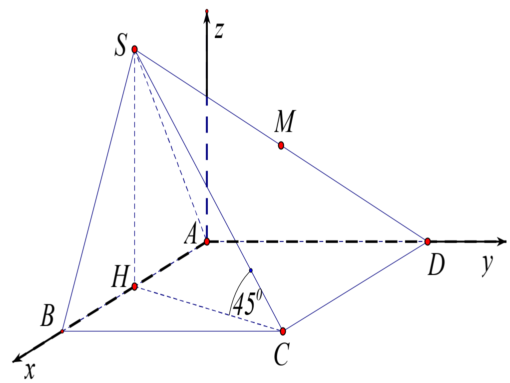
Ta có: $\overrightarrow{SD}=(0;a;-a\sqrt{3}), \overrightarrow{AC}=(a;a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{AC}\right]=(a^2\sqrt{3};-a^2\sqrt{3};-a^2)$

$\overrightarrow{AS}=(0;0;a\sqrt{3})$

Vậy: $d(SD,AC)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\dfrac{\left|a^2\sqrt{3}.0+(-a^2\sqrt{3}).0+(-a^2).a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(a^2\sqrt{3})^2+(-a^2\sqrt{3})^2+(-a^2)^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=2a, AD=a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 45^0. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC).

Giải:



Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH\perp(ABCD)\Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC lên $(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{(SC,HC)}$ $=\widehat{SCH}\Rightarrow\widehat{SCH}=45^0$

Trong tam giác SHC vuông tại H ta có:

$$SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\sqrt{BH^2+BC^2}.\tan\widehat{SCH}=\sqrt{a^2+a^2}.\tan 45^0=a\sqrt{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình với $A(0;0;0),B(2a;0;0),D(a;0;0)$. Khi đó: $C(2a;a;0),S(a;0;a\sqrt{2})$.

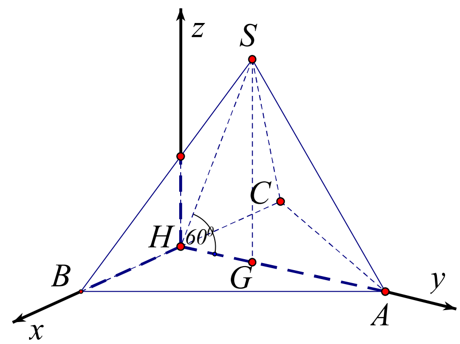
Tọa độ trung điểm M của SD là $M\left(a;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(2a;a;0),\overrightarrow{AS}=(a;0;a\sqrt{2})\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right]=\left(a^2\sqrt{2};-2a^2\sqrt{2};-a^2\right)$

Mặt phẳng (SAC) đi qua điểm $A(0;0;0)$ và nhận $\vec{n}=(\sqrt{2};-2\sqrt{2};-1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-z=0$

Vậy: $d(M,(SAC))=\dfrac{\left|\sqrt{2}.a-2\sqrt{2}.0-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2}}=\dfrac{a\sqrt{26}}{26}$

Ví dụ 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC, SBC là các tam giác đều cạnh a, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc bằng 60^0. Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính theo a khoảng cách từ B đến (SAC).



Giải:

Gọi H là trung điểm của BC và G là hình chiếu của S lên AH. Vì ABC và SBC là hai tam giác đều nên $BC\perp(SAH)\Rightarrow(SAH)\perp(ABC)$

Mà $(SAH)\cap(ABC)=AH, SG\subset(SAH), SG\perp AH$ nên $SG\perp(ABC)$

Ta có: $\widehat{((SBC),(ABC))}=\widehat{(SH,AH)}=\widehat{SHG}=60^0$

$\Rightarrow SG=SH.\sin\widehat{SHG}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 60^0=\dfrac{3a}{4}$;

$HG=SH.\cos\widehat{SHG}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Chọn hệ trục tọa độ như hình với

$H(0;0;0), B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right), C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right), A\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$; $S\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{3a}{4}\right)$

$\overrightarrow{CA}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \overrightarrow{CS}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{3a}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CS}\right]=\left(\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8};-\dfrac{3a^2}{8};-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)$

Mặt phẳng (SAC) đi qua đi qua điểm $C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$ và nhận $\vec{n}=(3;-\sqrt{3};-1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $3x-\sqrt{3}y-z+\dfrac{3a}{2}=0$

Vậy $d(B,(SAC))=\dfrac{\left|3.\dfrac{a}{2}-\sqrt{3}.0-0+\dfrac{3a}{2}\right|}{\sqrt{(3)^2+(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}.$

d) Giải pháp 4: Củng cố lại kiến thức, kỹ năng giải bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian:

Giáo viên tổ chức một vài buổi *thảo luận* trong đó giáo viên giao nhiệm vụ cho từng nhóm chuẩn bị trước ở nhà, nên chia thành 6 nhóm và năng lực học tập ở các nhóm là tương đương nhau.

Nhóm 1,2: Giải quyết các bài toán tính khoảng cách bằng phương pháp dùng định nghĩa khoảng cách.

Nhóm 3,4: Giải quyết các bài toán vận dụng thể tích, tỷ số thể tích để tính khoảng cách.

Nhóm 5,6: Giải quyết các bài toán khoảng cách bằng phương pháp tọa độ.

Buổi thảo luận được tiến hành theo trình tự như sau:

- Đầu tiên một nhóm lên trình bày, phát kết quả của nhóm cho các nhóm khác.
- Tiếp theo, các nhóm khác đưa ra câu hỏi đối với nhóm vừa trình bày, đề xuất cách giải của nhóm.
- Giáo viên nhận xét và đưa ra kết luận cuối cùng, yêu cầu toàn bộ học sinh ghi nhận.
- Giáo viên có thể trao thưởng cho các nhóm hoàn thành tốt nhiệm vụ, có thể thưởng điểm cao hoặc những món quà ý nghĩa để khích lệ học sinh.
- Giáo viên nhận xét từng học sinh trong sự chuẩn bị và tiếp thu kiến thức.

Buổi thảo luận tiếp theo thì yêu cầu của các nhóm được đổi cho nhau.

2.3.3. Một số bài tập tham khảo:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, AA'=2a, A'C=3a$. Gọi M là trung điểm của $A'C', I$ là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mp(IBC)

ĐS: $d(A,(IBC))=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=AB=a,BC=2a$, điểm M thuộc AD sao cho $AM=3MD.$ Tính khoảng cách từ M đến mp $(AB'C)$.

ĐS: $d(A,(AB'C))=\frac{a}{2}$

Bài 3: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mp(ABC), $\widehat{ABC}=90^0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) nếu $AD=a,AB=BC=b$

ĐS: $d(A,(BCD))=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Bài 4: Cho tứ diện đều $ABCD$, biết $AB=a,M$ là 1 điểm ở miền trong của tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ M đến các mặt của tứ diện.

ĐS: $h_1+h_2+h_3+h_4=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ACB}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a,AD=b.$ Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M,N là trung điểm cạnh SA,SD .

a. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SC.

b. Tính khoảng cách từ A đến (BCN) .

c. Tính khoảng cách giữa SB và CN.

ĐS:a. $d(M,SC)=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{5a^2+b^2}}$ b. $d(A,(BCN))=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.c. $d(SB,CN)=\frac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{17a^2+b^2}}$

Bài 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính khoảng cách giữa $A'C$ và MN

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N là trung điểm các cạnh bên SA và SB. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (DMN).

A. $\frac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{5}}$. B. $\frac{a\sqrt{31}}{\sqrt{60}}$. C. $\frac{a\sqrt{60}}{31}$. D. $\frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{31}}$.

Bài 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa AM và CD.

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $a\sqrt{2}$.

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đỉnh S cách đều các điểm A, B, C Biết $AC = 2a,\ BC = a$, góc giữa đường thẳng SB và $mp(ABC)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ trung điểm M của SC đến $mp(SAB)$ theo a.

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

Bài 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0,\ SA = SB = SC = 2a$. Tính khoảng cách giữa AB và SC

A. $\frac{a\sqrt{11}}{12}$. B. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{8}$. D. $\frac{3a\sqrt{11}}{4}$.

Bài 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách hai đường chéo nhau BC và AA' theo a là:

A. $\frac{2\sqrt{15}}{5}a$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}a$. C. $\frac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\frac{\sqrt{39}}{13}a$.

Bài 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$ Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Tính khoảng cách từ điểm C' đến $(ABB'A')$ là:

A. $\frac{3\sqrt{5}}{2}a$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{2\sqrt{85}}{17}a$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{3}a$.

Bài 13: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*. Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0 Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng *(SBC)* bằng:

A $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Bài 14: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Góc giữa đường thẳng *SA* với mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *GC* và *SA* bằng:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{a}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$.

Bài 15 : Cho hình chóp *S.ABC* có *SA, AB, AC* đôi một vuông góc, $AB = a, AC = a\sqrt{2}$ và diện tích tam giác *SBC* bằng $\frac{a^2\sqrt{33}}{6}$. Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng *(SBC)* bằng:

A. $\frac{a\sqrt{330}}{33}$. B. $\frac{a\sqrt{330}}{11}$. C. $\frac{a\sqrt{110}}{33}$. D. $\frac{2a\sqrt{330}}{33}$.

Bài 16: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, tam giác ABC vuông cân tại *B*, $BA = BC = a$, góc giữa $mp(SBC)$ với $mp(ABC)$ bằng 60^0. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI với BC .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Bài 17: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang *ABCD* vuông tại *A* và *B*. Biết $AD = 2a$, $AB = BC = SA = a$. Cạnh bên *SA* vuông góc với mặt đáy, gọi *M* là trung điểm của *AD*. Tính khoảng cách *h* từ *M* đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $h = \frac{a}{3}$.

Bài 18: Cho hình tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, $OB = a, OC = a\sqrt{3}$. Cạnh *OA* vuông góc với mặt phẳng *(OBC)*, $OA = a\sqrt{3}$, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.

A. $h = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{15}$.

Bài 19: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh *a*, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi *M* là trung điểm *SD*, thể tích khối chóp *S.ABCD* là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Hãy tính khoảng cách *h* từ *M* tới mặt phẳng (SBC) theo *a*.

A. $h = \frac{a\sqrt{228}}{38}$. B. $h = \frac{a\sqrt{228}}{19}$. C. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$. D. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{19}$.

Bài 20: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh *2a*, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. Hãy tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng *SB* và *AC* theo *a*.

A. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^0, gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng chéo nhau OG và AD.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $h=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Bài 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD}=120^0$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^0. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, tính khoảng cách h từ G đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $h=\dfrac{\sqrt{7}a}{14}$. B. $h=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $h=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$. D. $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{7}$.

Bài 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $h=a$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Bài 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA, BC.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $h=\dfrac{a}{2}$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $h=\dfrac{3a}{4}$.

Bài 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB. Tính theo a khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $h=\dfrac{2a}{3}$. B. $h=\dfrac{a}{3}$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $h = \frac{\sqrt{42}a}{8}$. B. $h = \frac{\sqrt{42}a}{12}$. C. $h = \frac{\sqrt{42}a}{12}$. D. $h = \frac{\sqrt{42}a}{12}$.

2.4. Kết quả thực hiện

Kết quả vận dụng của bản thân:

Chúng tôi đã thực hiện việc áp dụng cách làm này trong nhiều năm với những mức độ khác nhau giữa các lớp trong cùng một khoá học hoặc giữa các lớp ở các khoá học khác nhau.

Đề tài này đã được thực hiện giảng dạy khi tôi tham gia dạy lớp 12A7 năm học 2017- 2018 ở Trường THPT Nguyễn Thái Học. Trong quá trình học đề tài này, học sinh thực sự thấy tự tin, tạo cho học sinh niềm đam mê, yêu thích môn toán, mở ra cho học sinh cách nhìn nhận, vận dụng, linh hoạt, sáng tạo các kiến thức đã học, tạo nền cho học sinh tự học, tự nghiên cứu. Kết quả, học sinh tích cực tham gia giải bài tập, nhiều em tiến bộ, nắm vững kiến thức cơ bản, nhiều em vận dụng tốt ở từng bài toán cụ thể. Qua các bài kiểm tra về nội dung này và các bài thi học kỳ, thi thử Cao đẳng, Đại học có nội dung này, tôi nhận thấy nhiều em có sự tiến bộ rõ rệt và đạt kết quả tốt. Cụ thể như sau :

Lớp 12A7 năm học 2017-2018 (Sĩ số 43)									
G		K		TB		Y		Kém	
SL	TL	SL	TL	SL	TL	SL	TL	SL	TL
8	19%	20	47%	12	28%	3	7%	0	0%

Triển khai trước tổ bộ môn:

Chúng tôi đã đưa đề tài này ra tổ để trao đổi, thảo luận và rút kinh nghiệm. Đa số các đồng nghiệp trong tổ đã đánh giá cao và vận dụng có hiệu quả, tạo được hứng thú cho học sinh và giúp các em hiểu sâu, nắm vững hơn về bản chất hình học cũng như tạo thói quen sáng tạo trong nghiên cứu và học tập. Đề tài này cũng đã được Tổ dạy sinh hoạt chuyên đề theo hướng nghiên cứu bài học trong năm học 2017 – 2018 và cho đến nay, những kinh nghiệm của tôi đã được tổ thừa nhận là có tính thực tiễn và tính khả thi. Hiện nay, chúng tôi tiếp tục xây dựng thêm nhiều ý tưởng để giúp học sinh trường THPT Nguyễn Thái Học học tập nội dung này một cách tốt nhất để đạt kết quả cao nhất trong các kì thi.

III. KẾT LUẬN

Trong dạy học giải bài tập toán nói chung và dạy học giải bài tập khoảng cách trong không gian nói riêng, việc xây dựng, phân tích và tìm ra hướng giải cho một bài toán sẽ giúp học sinh dễ dàng tiếp cận với nội dung bài học, lựa chọn được cách giải phù hợp với trình độ, kiến thức mình có là một việc

làm hết sức cần thiết, qua đó có thể phát triển tư duy học toán cũng như tạo ra niềm vui và sự hứng thú trong học toán.

Việc chọn trình tự bài tập và phân dạng như trên giúp học sinh dễ tiếp thu hơn và thấy được trong từng bài toán nên áp dụng kiến thức nào cho phù hợp. Mỗi dạng toán Tôi chọn một số bài tập để học sinh hiểu cách làm để từ đó làm những bài tập mang tính tương tự và dần nâng cao hơn. Tuy nhiên, vì thời gian và trong khuôn khổ đề tài nên vẫn chưa trình bày hết được các ý tưởng.

Do đó, đây chỉ là những giải pháp trong hàng vạn giải pháp để giúp phát triển tư duy, sự sáng tạo của học sinh. Giáo viên trước hết phải cung cấp cho học sinh nắm chắc các kiến thức cơ bản sau đó là cung cấp cho học sinh cách nhận dạng bài toán, thể hiện bài toán từ đó học sinh có thể vân dụng linh hoạt các kiến thức cơ bản, phân tích tìm ra hướng giải, bắt đầu từ đâu và bắt đầu như thế nào là rất quan trọng để học sinh không sợ khi đứng trước một bài toán khó mà dần dần tạo sự tự tin, gây hứng thú say mê môn toán, từ đó tạo cho học sinh tác phong tự học tự nghiên cứu.

Tuy là đề tài giúp các em học sinh 12 ôn thi THPT Quốc gia nhưng nó có thể áp dụng cho học sinh lớp 11 ở giải pháp 1. Còn các giải pháp 2 và 3 sẽ goúp học sinh cách thực hiện nhanh bài toán trắc nghiệm về khoảng cách. Riêng giải pháp 3 có thể phát triển, áp dụng các bài toán khác trong hình học không gian. Qua đó, Tôi muốn cho học sinh thấy mình có thể áp dụng kiến thức mình đang có đi giải quyết dễ dàng một số bài toán mà trước đây là quá khó đối với mình.

Đề tài có thể phát triển, bổ sung vào một giải pháp nữa là sử dụng tính chất " ***khoảng cách là độ dài nhỏ nhất*** " để từ đó ta có thể áp dụng Bất đẳng thức vào giải quyết bài toán khoảng cách và áp dụng bài toán khoảng cách để giải quyết bài toán Bất đẳng thức và cực trị là một trong những bài toán hay và khó.

Rất mong sự đóng góp ý kiến của các bạn quan tâm và đồng nghiệp để đề tài này được đầy đủ hoàn thiện hơn, ngày càng được áp dụng rỗng rãi, mang lại hiệu quả thiết thực cho mọi đối tượng học sinh.

Chư Pưh, ngày 03 tháng 03 năm 2018

NGƯỜI THỰC HIỆN

Trần Thanh Hữu

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đoàn Quỳnh, *SGK Hình học 12*, NXB Giáo dục, năm 2008

[2]. Lê Hoành Phò, *Hình học 12- Bài tập và phương pháp giải*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2011.

[3]. Trần Công Diêu – Trần Kim Anh, *Luyện đề THPT Quốc Gia 2018_ Toán trắc nghiệm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2017.

[4]. Trần Minh Quang, *27 chủ đề Toán hình học không gian,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2010.

[5]. Trần Thành Minh, *Giải toán Hình học 11*, NXB Giáo dục, năm 2003.

MỤC LỤC